VII International Meeting in Mathematical Sciences
Huaraz, Perú
December 15–17, 2025

Completitud y separabilidad del espacio de Lebesgue generalizado

Juan Andres Mena Ccanto* [1]

[1] *Univesidad Nacional Del Callao*

Resumen

Este poster, se centra en presentar a los espacios L^p donde p es variable, una función que depende de $x \in \Omega$, llamados espacios L^p generalizados o espacio de lebesgue generalizado. La idea de este estudio nace de la resolucion de EDPs, como sabemos los espacios de sobolev nos permiten encontrar soluciones débiles para algunas EDPs sin solución exacta. Sin embargo en casos tales como la EDP no lineal de Dirichlet

$$\sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, \delta_k u) = f \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega$$

donde $\delta_k u = \{D^\alpha u : |\alpha| \leq k\}$. sus soluciones débiles suelen hallarse mediante el teorema de Browder, el cual nos dice que se debe cumplir las condiciones

- **Condición de crecimiento:** $|a_\alpha(x,\xi)| \leq g(x) + c\sum|\xi_\alpha|^{p-1}$ con $g \in L^{p'}$
- **Condición de coercividad:** $\sum a_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \geq c_1 \sum |\xi_\alpha|^p - c_2$

Pero aquí viene el punto que nos lleva a estudiar el caso de los $p(x)$ variable. Si nosotros consideramos una situación más general donde $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $1 < p_1 < p_2 < \infty$, y las dos condiciones son satisfechas por $p_i \in \Omega_i$. La condición de Crecimiento requiere $p \geq p_2$ y la condición de coercividad requiere $p \leq p_1$.
Esto es una contradicción, pues $p_1 < p_2$ pero necesitamos $p \leq p_1$ y $p \geq p_2$. Esta complejidad se incrementa si tomamos p variable, es decir, $p = p(x)$ con $p(x) = p_1$ en Ω_1, $p(x) = p_2$ en Ω_2. Y así es como surge la motivación de estudiar los espacios de Sobolev $W_0^{k,p(x)}$. Sin embargo asi como el espacio de Sobolev clásico se estudia a partir de los espacios $L^p(\Omega)$ clásico, el espacios de Sobolev generalizado también se conocen a partir de los espacios $L^{p(x)}$, este ultimo es el tema central del poster. Definiremos los espacios $L^{p(x)}(\Omega)$ con su respectiva norma $\|\cdot\|_{p(x)}$ y buscaremos mostrar que estos son espacios de Banach y separables.

*e-mail:jamenac@unac.edu.pe

Referencias

[1] O. Kováčik and J. Rákosník, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$*, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 41 (1991), No. 4, 592–618.

[2] L. Diening, P. Harjulehto and M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2017, Springer, 2011.